

# Les réseaux de contraintes quantitatives ultimement périodiques (UPSTP)

Jean-François Condotta<sup>1</sup> Gérard Ligozat<sup>2</sup> Stavros Tripakis<sup>3</sup>

<sup>1</sup> CRIL-CNRS, Université d'Artois, Rue de l'Université 62307 Lens, France

<sup>2</sup> LIMSI-CNRS, Université de Paris-Sud 91403 Orsay, France

<sup>3</sup> VERIMAG, Centre Équation, 2, avenue de Vignate, 38610 Gieres, France

condotta@cril.univ-artois.fr ligozat@limsi.fr tripakis@imag.fr

## Résumé

Dans cette étude, nous considérons des réseaux de contraintes quantitatives temporelles ou spatiales évoluant au cours du temps de manière périodique. Ces réseaux de contraintes sont une extension des STP (Simple Temporal Problems). Nous étudions les propriétés de base de ces réseaux de contraintes, et nous proposons également un algorithme de propagation locale de contraintes. Nous montrons que pour plusieurs cas intéressants cet algorithme est complet et donc résout le problème de la cohérence.

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications de l'Informatique et en particulier de l'Intelligence Artificielle il est nécessaire de raisonner sur des informations temporelles. De nombreux formalismes permettant de raisonner à partir de contraintes temporelles ont été proposés. Les réseaux de contraintes qu'ils considèrent diffèrent d'une part sur les entités temporelles représentées par les variables. Ces entités peuvent être par exemple des points temporels, des intervalles de temps, des durées ou bien encore des distances. La nature des contraintes utilisées permet également de distinguer ces formalismes, elle peut être qualitative [1, 13, 10], métrique/quantitative [6, 4] ou bien encore les deux [8, 11, 3].

Les STP (Simple Temporal Problem) [4] font partie de la classe des réseaux de contraintes temporelles quantitatives. Ils représentent des entités temporelles par des points de la droite et permettent de contraindre les distances/durées entre ces points par des valeurs numériques spécifiées par des intervalles. La résolu-

tion d'un STP peut être réalisée en temps polynomial, ceci explique l'utilisation importante de ces réseaux de contraintes. Les STP ont été à de nombreuses reprises "étendus" pour définir des réseaux de contraintes plus expressifs [5, 9, 2].

Dans ce papier, nous considérons des réseaux de contraintes quantitatives temporelles évoluant au cours du temps de manière périodique. Ces réseaux de contraintes sont une extension des STP et des "contraintes cycliques" définis par Tripakis [12], ils sont appelés STP ultimement périodiques (UPSTP en abrégé). Cette notion interprétée dans un contexte spatial peut être vue comme un STP temporisé : plus précisément, considérons un ensemble d'objets ponctuels de la droite dont les positions changent au cours du temps. À chaque instant, chaque objet a une position donnée. Avec un UPSTP nous pourrions exprimer des contraintes sur les positions relatives des objets au cours du temps et en particulier des contraintes devant être satisfaites sur chaque instant à partir d'un certain instant (des contraintes périodiques). Dans un contexte temporel, une activité ou un événement ponctuel récurrent peut posséder un nombre fini ou infini d'occurrences au cours du temps. Dans certaines applications ces occurrences doivent satisfaire des contraintes sur les durées les séparant. Un UPSTP permettra de spécifier de telles contraintes.

Nous étudions les propriétés de base de ces réseaux de contraintes. Nous proposons également un algorithme de propagation locale de contraintes spécifiques à ces réseaux de contraintes. Nous montrons que pour plusieurs cas intéressants cet algorithme est complet et donc résout le problème de la cohérence.

La structure de cet article est la suivante. La section 2 est consacrée à des rappels sur les STP. Dans la section 3 nous définissons les réseaux de contraintes UPSTP. Dans la section 4 nous montrons principalement comment peuvent être reliées la cohérence d'un UPSTP et la cohérence d'une séquence de STP classiques. La section 5 est dévolue à l'étude de UPSTP particuliers : les UPSTP fermés. Un algorithme de propagation locale de contraintes est proposé dans la section 6. La section 7 conclut notre papier.

## 2 Préliminaires sur les STP

Nous dénotons l'ensemble des intervalles de la droite des nombres rationnels par  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$ . Les bornes des intervalles de cet ensemble peuvent être finies ou infinies, fermées ou ouvertes. Cet ensemble contient également l'intervalle "vide" que nous dénoterons par  $\emptyset$ . Étant donnés deux intervalles  $I$  et  $J$ ,  $-I$  dénotera l'intervalle opposé à  $I$ , c'est-à-dire l'intervalle déduit de  $I$  par la symétrie  $x \mapsto -x$  par rapport à l'origine.  $I \cap J$  dénotera l'intervalle correspondant à l'intersection de  $I$  et  $J$ ,  $I + J$  correspondra à la somme des deux intervalles  $I$  et  $J$ , c'est-à-dire l'intervalle ayant pour borne inférieure la somme des bornes inférieures des deux intervalles  $I$  et  $J$  et pour borne supérieure la somme des bornes supérieures des deux intervalles  $I$  et  $J$ . Étant donné un entier positif  $c$ ,  $c.I$  correspond à l'intervalle dont la borne inférieure (resp. la borne supérieure) est la borne inférieure (supérieure) de  $I$  multipliée par  $c$ . À des fins d'illustration, considérons les deux intervalles  $] - \infty, 3]$  et  $]1, 5]$ . Nous avons  $] - \infty, 3] = [-3, +\infty[$ ,  $]1, 5] = [-5, -1[$ ,  $] - \infty, 3] \cap ]1, 5] = ]1, 3]$ ,  $] - \infty, 3] + ]1, 5] = ] - \infty, 8]$  et  $2.]1, 5] = ]2, 10]$ . Les STP [4] sont des réseaux de contraintes quantitatives binaires permettant de définir des contraintes sur les distances mutuelles d'un ensemble de points de la droite. Chacune des contraintes est définie par un intervalle correspondant aux valeurs possibles de la distance entre les deux points concernés. Les contraintes des STP que nous considérons sont définies par des intervalles de  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$  :

**Définition 1** *Un STP  $S$  est un couple  $(V, C)$  où :*

- *$V$  est un ensemble fini de variables  $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ , avec  $n$  un nombre entier positif;*
- *$C$  est une application de  $V \times V$  dans  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$ , associant à chaque couple  $(v_i, v_j) \in V \times V$  un intervalle  $C(v_i, v_j)$  de  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$  (que nous noterons également  $C_{ij}$ ) telle que  $C(v_i, v_i) \subseteq [0, 0]$  et  $C(v_j, v_i) = -C(v_i, v_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$ .*

Chaque variable  $v_i$  représente un point de la droite des nombres rationnels. Un intervalle  $C(v_i, v_j)$  stipule l'en-

semble des valeurs admissibles pour la distance  $(v_j v_i)$  entre les points représentés par  $v_i$  et  $v_j$ . Les solutions d'un réseau de contraintes de type STP sont définies formellement de la manière suivante :

**Définition 2** *Soit un STP  $S = (V, C)$ .*

- *Une instanciation  $\sigma$  de  $S$  est une fonction de  $V$  dans  $\mathbb{Q}$  associant à chaque variable  $v_i$  de  $V$  un nombre rationnel  $\sigma(v_i)$  (que nous dénoterons également par  $\sigma_i$ ).*
- *Une instanciation  $\sigma$  de  $S$  est une solution ssi pour tout  $v_i, v_j \in V$ ,  $\sigma_j - \sigma_i \in C_{ij}$ .*

Un STP sera dit cohérent ssi il admet une solution. Le problème de la cohérence des STP consiste à déterminer, étant donné un STP, si celui-ci est cohérent ou non. Ce problème est un problème connu comme étant un problème polynomial. Nous dirons qu'un STP  $S = (V, C)$  est un sous STP de  $S' = (V', C')$ , ce qui se note  $S \subseteq S'$ , lorsque  $V = V'$  et que  $C(v_i, v_j) \subseteq C'(v_i, v_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  (on notera  $S \subset S'$  lorsque pour au moins un couple  $v_i, v_j \in V$  nous avons  $C(v_i, v_j) \subset C'(v_i, v_j)$ ).

Nous dirons qu'un STP  $S = (V, C)$  est fermé par chemin-cohérence ssi pour tout triplet  $v_i, v_j, v_k \in V$ ,  $C(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_k) + C(v_k, v_j)$ . Il est bien connu qu'un STP fermé par chemin-cohérence et ne contenant pas l'intervalle vide comme contrainte est cohérent et est également globalement cohérent (toute solution partielle sur un sous-ensemble de variables pourra toujours être étendue à une autre variable). Étant donné un STP  $S$ , il existe un unique STP équivalent et fermé par chemin-cohérence, nous le dénoterons par  $\text{PC}(S)$ . Des méthodes polynomiales consistant principalement à itérer l'opération de triangulation :  $C_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} + C_{kj})$  sur tout triplet de variables  $v_i, v_j$  et  $v_k$  jusqu'à l'obtention d'un point fixe. Nous pouvons par exemple utiliser l'algorithme *PC1* [7] qui ne réalise qu'une seule boucle principale dans le cas des STP et qui a donc une complexité en temps de  $O(|V|^3)$ .

## 3 Les réseaux de contraintes quantitatives ultimement périodiques

Dans un contexte temporel, un STP exprime des contraintes quantitatives entre les composantes temporelles ponctuelles d'un ensemble d'activités ou d'événements. Un STP peut également être utilisé dans un contexte spatial pour représenter des contraintes sur les positions relatives d'un ensemble d'objets ponctuels sur la droite. Nous définissons maintenant la notion principal de ce papier que nous appelons *réseau de contraintes quantitatives ultimement périodique* ou bien encore STP ultimement péri-

dique (UPSTP en abrégé). Cette nouvelle notion interprétée dans un contexte spatial peut être vue comme un STP temporisé : plus précisément, considérons un ensemble d'objets ponctuels de la droite dont les positions changent au cours du temps. À chaque instant, chaque objet a une position donnée. Avec un UPSTP nous pourrions exprimer trois types de contraintes :

- des contraintes entre les positions de deux objets à un instant donné,
- des contraintes entre les positions de deux objets à des instants différents,
- des contraintes entre les positions de deux objets devant être satisfaites sur tous les instants futurs d'un certain instant.

Nous supposons que le temps est modélisé par les entiers naturels. Ainsi, à chaque nombre entier  $t \geq 0$  correspond un instant. Dans un contexte temporel, une activité ou un événement ponctuel récurrent peut posséder un nombre fini ou infini d'occurrences au cours du temps. Dans certaines applications ces occurrences doivent satisfaire des contraintes sur les durées les séparant. Un UPSTP permettra de spécifier de telles contraintes.

Formellement, nous définissons un STP *ultimement périodique* de la manière suivante :

**Définition 3** Un UPSTP est un quadruplet  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  où :

- $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  est un ensemble fini de  $n$  variables ;
- $t_{min}$  et  $t_{max}$  sont deux entiers positifs tels que  $t_{min} \leq t_{max}$  ;
- $C$  est une application de  $V \times \{0, \dots, t_{max}\} \times V \times \{0, \dots, t_{max}\}$  dans  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$  telle que  $C(v_i, t_i, v_j, t_j) = -C(v_j, t_j, v_i, t_i)$  et  $C(v_i, t_i, v_i, t_i) \subseteq [0, 0]$  pour tous  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, t_{max}\}$ .

Intuitivement, dans un contexte spatial, chaque variable  $v_i \in V$  représente un point de la droite des nombres rationnels dont la position évolue au cours du temps. Le couple  $(v_i, t_i)$ , avec  $t_i \in \mathbb{N}$ , représente cette position à l'instant  $t_i$ . La contrainte  $C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  contraint la distance entre le point  $v_i$  à l'instant  $t_i$  et le point  $v_j$  à l'instant  $t_j$ . Dans un contexte temporel, la variable  $v_i$  représente, non plus la composante spatiale ponctuelle d'un objet, mais une activité ou un événement récurrent. Le couple  $(v_i, t_i) \in V \times \mathbb{N}$  représente donc la  $(t_i + 1)^{\text{ème}}$  occurrence de l'événement représenté par  $v_i$ .

L'application  $C$  exprime de manière explicite les contraintes entre les positions des différentes occurrences des variables de  $V$  pour les instants compris entre 0 et  $t_{max}$ . L'application  $C$  exprime également des contraintes qui devront être satisfaites au cours des

instants futurs. En effet, les contraintes sur la période de temps correspondant aux instants  $\{t_{min}, \dots, t_{max}\}$  devront être également satisfaites sur les périodes de temps futures, c'est-à-dire sur chacune des périodes  $\{t_{min} + i, \dots, t_{max} + i\}$  pour tout  $i \geq 0$ . Conformément à ces interprétations, nous définissons les solutions d'un UPSTP de la manière suivante :

**Définition 4** Une solution  $\sigma$  d'un UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  est une application de  $V \times \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Q}$  telle que pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \mathbb{N}$  :

1. si  $t_i, t_j \leq t_{max}$  alors  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  ;
2. si  $t_{min} \leq t_i \leq t_j$  et  $t_j - t_i \leq t_{max} - t_{min}$  alors pour tout  $t'_i, t'_j$  tels que  $t_{min} \leq t'_i \leq \min\{t_{max}, t_i\}$  et  $t_{min} \leq t'_j \leq \min\{t_{max}, t_j\}$  et  $t_j - t_i = t'_j - t'_i$  nous avons  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C(v_i, t'_i, v_j, t'_j)$ .

Nous étendons de manière naturelle les notions de cohérence, d'incohérence et d'équivalence aux réseaux de contraintes de type UPSTP. Les exemples suivants illustrent les définitions précédentes.

**Exemple 1** Dans un cadre représentation de données spatiales, considérons trois objets  $O_0, O_1$  et  $O_2$ , dont les positions spatiales sont représentées par trois variables  $v_0, v_1$  et  $v_2$  ayant pour domaine l'ensemble des nombres rationnels. Supposons que ces objets se meuvent au cours du temps avec les contraintes suivantes :

- à l'instant 0,  $O_0$  est à gauche de  $O_1$  et à gauche de  $O_2$  à une distance comprise entre 3 et 5 ;
- la position de  $O_2$  à l'instant 0 est à gauche de sa position à l'instant 1 ;
- à l'instant 1, et pour tous les instants futurs,  $O_0$  est à droite de  $O_1$  à une distance maximale de 10 ;
- à partir de l'instant 1,  $O_0$  se déplace sur sa gauche, et  $O_1$  se déplace sur sa droite ;
- à partir de l'instant 2,  $O_2$  bouge sur sa gauche et reste aux alentours de  $O_1$  à une distance maximale de 4.

Ces contraintes peuvent être exprimées par le UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$ , où  $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $t_{min} = 1$ ,  $t_{max} = 3$ . Les contraintes définies par  $C$  sont représentées dans la figure 1. Comme d'habitude, ne sont pas représentées dans la figure les contraintes suivantes : la contrainte entre une variable et elle même, la contrainte universelle  $[-\infty, +\infty]$ , la contrainte opposée à une contrainte déjà représentée. Ce UPSTP est cohérent, une de ses solutions est décrite dans la figure 2.

**Exemple 2** Considérons maintenant deux événements ponctuels récurrents  $E_0$  et  $E_1$  représentés par deux variables  $v_0$  et  $v_1$  ayant pour domaine l'ensemble

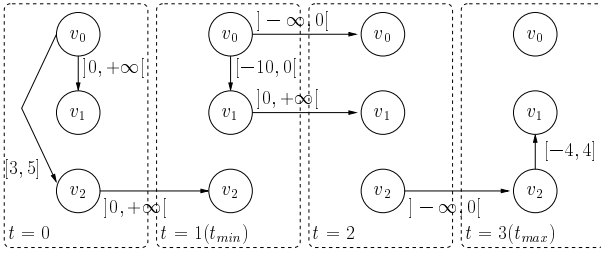


FIG. 1 – Le UPSTP  $\mathcal{U}$  correspondant à l'exemple 1.

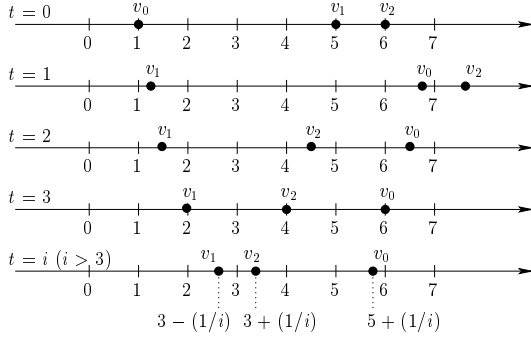


FIG. 2 – Une solution du UPSTP  $\mathcal{U}$  de l'exemple 1.

des nombres rationnels. Supposons que les différentes occurrences de ces événements soient contraintes de la manière suivante :

- pour tout  $i \geq 0$ , la  $i^{\text{ème}}$  occurrence de  $E_1$  apparaît toujours après la  $i^{\text{ème}}$  occurrence de  $E_0$ . Ces occurrences sont séparées d'au moins une seconde.
- Pour tout  $i \geq 0$ , la  $(i+1)^{\text{ème}}$  occurrence et la  $i^{\text{ème}}$  occurrence de  $E_0$  sont séparées d'au moins deux secondes, celles de  $E_1$  sont toujours distantes d'exactement une seconde.

Ces contraintes peuvent être exprimées par l'UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{\min}, t_{\max})$ , où  $V = \{v_0, v_1\}$ ,  $t_{\min} = 0$ ,  $t_{\max} = 1$ . Les contraintes définies par  $C$  sont représentées dans la figure 3. Le lecteur peut vérifier que cet UPSTP n'est pas cohérent.

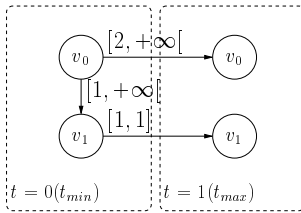


FIG. 3 – Les contraintes  $C$  du UPSTP  $\mathcal{U}$  de l'exemple 2.

Pour clore cette section remarquons que le problème de la cohérence d'un UPSTP quelconque peut être ramené (de manière polynomiale) au problème d'un UPSTP dont les contraintes ont pour bornes finies des nombres entiers :

**Proposition 1** Soit un UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{\min}, t_{\max})$  et soit  $d$  l'entier correspondant au produit des dénominateurs des bornes finies<sup>1</sup> des intervalles définissant  $C$  ( $d = 1$  dans le cas où toutes les bornes sont infinies). Soit  $\mathcal{U}' = (V, C', t_{\min}, t_{\max})$  le UPSTP défini par  $C'(v_i, t_i, v_j, t_j) = d \cdot C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, t_{\max}\}$ . Alors  $\mathcal{U}$  est cohérent ssi  $\mathcal{U}'$  est cohérent.

**Preuve** Soit  $\sigma$  une solution de  $\mathcal{U}$ . Soit  $\sigma'$  l'application de  $V \times \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Q}$  définie par  $\sigma'(v_i, t_i) = d(\sigma(v_i, t_i) - \sigma(v_0, 0))$  pour tout  $v_i \in V$  et  $t_i \in \mathbb{N}$ . Nous pouvons montrer que  $\sigma'$  est une solution de  $\mathcal{U}'$ . Maintenant, supposons donnée une solution  $\sigma'$  de  $\mathcal{U}'$ . En définissant une application  $\sigma$  de  $V \times \mathbb{N}$  vers  $\mathbb{Q}$  par  $\sigma(v_i, t_i) = (\sigma'(v_i, t_i) - \sigma'(v_0, 0))/d$  pour tout  $v_i \in V$  et  $t_i \in \mathbb{N}$  nous obtenons une solution de  $\mathcal{U}$ .  $\dashv$

Fort de ce fait, dans la suite de ce travail nous considérerons sans perte de généralité des UPSTP dont les contraintes ont pour bornes finies des nombres entiers.

## 4 Contraintes implicites versus contraintes explicites

Dans cette section nous allons relier le problème de la cohérence d'un UPSTP – qui potentiellement exprime un nombre infini de contraintes – aux problèmes de la cohérence de STP. Pour ce faire nous réalisons les étapes suivantes :

1. nous associons à tout UPSTP un STP représentant ses contraintes périodiques. Ce STP sera appelé le *motif* du UPSTP.
2. En utilisant cette notion de motif, nous définissons une séquence de STP “au support temporel croissant”. Chacun de ces STP explicite les contraintes du UPSTP sur un certain nombre de premiers instants. Nous les appelons les  $k$ -renforcements du UPSTP.
3. Nous relierons la cohérence d'un UPSTP à des propriétés concernant la cohérence de ses  $k$ -renforcements.

Nous allons maintenant procéder à la réalisation en détails de ces trois étapes. Nous définissons tout d'abord le motif d'un UPSTP :

<sup>1</sup>Nous supposons que la valeur d'une borne finie d'une contrainte est définie par une fraction  $p/q$  avec  $p$  un entier et  $q$  un entier strictement positif

**Définition 5** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{\min}, t_{\max})$  un UPSTP. Le motif de  $\mathcal{U}$ , dénoté par  $\text{motif}(\mathcal{U})$ , est le STP  $\mathcal{S}_m = (V_m, C_m)$  où  $V_m = V \times \{0, \dots, \lg\}$  (avec  $\lg = t_{\max} - t_{\min}$ ) et  $C_m((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C(v_i, t_i + t_{\min}, v_j, t_j + t_{\min})$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et pour tout  $t_i, t_j \in \{0, \dots, \lg\}$ .

Dans la suite  $\lg$  dénotera la différence  $t_{\max} - t_{\min}$ . Le motif du UPSTP  $\mathcal{U}$  de la figure 1 est représenté dans la figure 4.

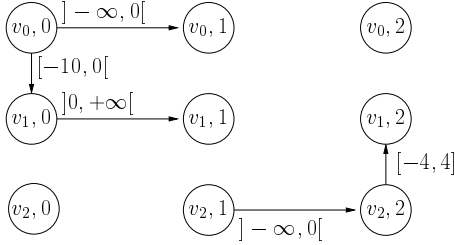


FIG. 4 – Le motif du UPSTP  $\mathcal{U}$ .

En utilisant la notion de motif, nous allons maintenant définir des réseaux de contraintes finis qui, d'une certaine manière, explicitent des contraintes d'un UPSTP devant être satisfaites durant les  $(k+1)$  premiers instants (où  $k \geq t_{\max}$ ). Pour un tel  $k$ , nous définirons le  $k$ -renforcement du UPSTP. Avant de donner une définition formelle donnons une description intuitive de cette notion. Supposons que nous ayons sur papier une représentation des contraintes du UPSTP sur les instants  $\{0, \dots, t_{\max}\}$ . Imaginons que nous ayons maintenant la description du motif sur une feuille transparente à part. Étant donné un entier  $k \geq t_{\max}$ , nous superposons le motif de la feuille transparente sur le réseau de contraintes initial, puis de manière répétitive nous décalons ce motif d'un instant, puis de deux instants, puis de trois instants et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'instant  $k$  soit atteint. À chaque fois nous ajoutons les contraintes de la feuille transparente à celles obtenues à l'étape précédente (en prenant l'intersection). Le  $k$ -renforcement est le réseau de contraintes obtenu lorsque l'instant  $k$  est atteint. Donnons maintenant une définition formelle :

**Définition 6** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{\min}, t_{\max})$  un UPSTP et  $\mathcal{S}_m = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C_m)$  son motif. Étant donné un entier  $k \geq t_{\max}$ , le  $k$ -renforcement de  $\mathcal{U}$ , dénoté par  $k\text{-renforcement}(\mathcal{U})$ , est un STP  $\mathcal{S}^k = (V^k, C^k)$  défini récursivement par :

- $V^k = V \times \{0, \dots, k\}$  ;
- $C^{t_{\max}}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, t_{\max}\}$  ;
- pour tout  $k \geq t_{\max}$  et pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, k+1\}$  avec  $t_i \leq t_j$ ,

- $C^{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C^k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ , si  $t_i < (k+1) - \lg$  et  $t_j < k+1$ ,
- $C^{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C^k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \cap C_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ , if  $t_i \geq (k+1) - \lg$  et  $t_j < k+1$ ,
- $C^{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ , si  $t_j = k+1$  et  $t_j - t_i \leq \lg$ ,
- $C^{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = ]-\infty, +\infty[$ , si  $t_j = k+1$  et  $t_j - t_i > \lg$ ,
- $C^{k+1}((v_j, t_j), (v_i, t_i)) = -C^{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .

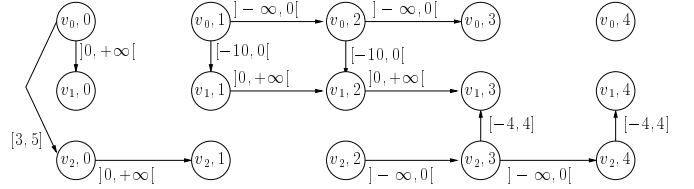


FIG. 5 – Le 4-renforcement du UPSTP  $\mathcal{U}$ .

La figure 5 décrit le 4-renforcement du UPSTP  $\mathcal{U}$  de la figure 1. Nous utiliserons également dans la suite la notion de fenêtre d'un  $k$ -renforcement qui est un STP capturant ses contraintes sur  $(\lg + 1)$  instants consécutifs :

**Définition 7** Soit  $\mathcal{S}^k = (V \times \{0, \dots, k\}, C^k)$  le  $k$ -renforcement d'un UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{\min}, t_{\max})$ , avec  $k \geq t_{\max}$ . La  $t$ -fenêtre de  $\mathcal{S}^k$ , avec  $t_{\min} \leq t \leq k - \lg$ , dénotée par  $t\text{-fenêtre}(\mathcal{S})$ , est le STP  $\mathcal{S}_t = (V_t, C_t)$  où :  $V_t = V \times \{0, \dots, \lg\}$  et  $C_t((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C^k((v_i, t_i + t), (v_j, t_j + t))$ , pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, \lg\}$ .

La fin de  $\mathcal{S}^k$  correspond à sa dernière fenêtre, c'est à dire à sa  $(k - \lg)$ -fenêtre. La figure 6 représente la fin du 4-renforcement se trouvant dans la figure 5.

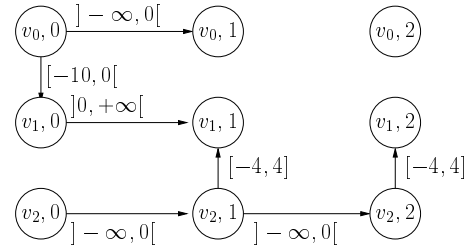


FIG. 6 – La fin du 4-renforcement du UPSTP  $\mathcal{U}$ .

Nous donnons une dernière définition avant d'étudier l'interaction entre les propriétés de cohérence des différents réseaux de contraintes introduits précédemment.

**Définition 8** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP et  $\mathcal{S}^k = (V \times \{0, \dots, k\}, C^k)$  son  $k$ -renforcement pour un entier  $k \geq t_{max}$ . Une application  $\sigma$  de  $V \times \mathbb{N}$  vers  $D$  est une solution de  $\mathcal{S}^k$  ssi la restriction de  $\sigma$  à  $V \times \{0, \dots, k\}$  est une solution de  $\mathcal{S}^k$ , c'est-à-dire ssi  $\sigma(v_i, t_i) C^k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \sigma(v_j, t_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, k\}$ .

Un premier résultat est qu'une solution d'un UPSTP fournit des solutions de ses  $k$ -renforcements :

**Proposition 2** Soit  $\mathcal{U}$  un UPSTP et  $\sigma$  une solution de  $\mathcal{U}$ . L'application  $\sigma$  est une solution de  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ) pour tout  $k \geq t_{max}$ .

Une preuve de cette proposition peut être réalisée par induction sur  $k$ , avec  $k = t_{max}$  comme cas de base. La proposition suivante exprime le fait qu'une solution potentielle peut être testée sur l'ensemble de ses  $k$ -renforcements :

**Proposition 3** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP et  $\sigma$  une application de  $V \times \mathbb{N}$  dans  $D$ . Si  $\sigma$  est une solution de  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ) pour tout  $k \geq t_{max}$ , alors  $\sigma$  est une solution de  $\mathcal{U}$ .

Une preuve de cette proposition consiste en une démonstration par l'absurde où l'on suppose que  $\sigma$  n'est pas une solution de  $\mathcal{U}$ , ce qui conduit au fait que  $\sigma$  n'est pas solution d'un  $k$ -renforcement pour un certain entier  $k$  supérieur à  $t_{max}$  et, par conséquent à une contradiction.

Remarquons que la cohérence de l'ensemble des  $k$ -renforcements d'un UPSTP n'implique pas, dans le cas général, la cohérence de ce UPSTP. Pour s'en convaincre il suffit de considérer le UPSTP représenté dans la figure 3. Malgré son incohérence il est possible de définir une solution de chacun de ses  $k$ -renforcements.

La proposition finale de cette section est un résultat technique qui sera utilisé plus tard. Il peut être directement prouvé en utilisant la définition d'un  $k$ -renforcement et celle de sa fin :

**Proposition 4** Soit  $\mathcal{U}$  un UPSTP. Pour tout  $k \geq t_{max}$ , le STP  $\text{fin}(k\text{-renforcement}(\mathcal{U}))$  est un sous-réseau de motif( $\mathcal{U}$ ).

## 5 Le problème de la cohérence des UPSTP fermés

Dans cette section nous allons étudier des UPSTP particuliers : les UPSTP fermés. Nous allons montrer que le problème de la cohérence de ces réseaux de contraintes peut être ramené à celui de la cohérence

de leur  $t_{max}$ -renforcement et est donc "facile" à résoudre. Dans la section suivante nous proposerons un algorithme de propagation locale de contraintes ayant pour objectif de transformer un UPSTP quelconque en un UPSTP fermé.

Avant de définir la propriété de fermeture d'un UPSTP nous introduisons une opération appelée opération de translation. Partant du motif d'un UPSTP, l'opération de translation permet de construire un STP superposant les contraintes de ce motif et celles qui doivent être satisfaites sur la "période" suivante (celles devant être satisfaites à l'instant suivant en décalant d'un instant les contraintes du motif). Cette opération est inspirée d'une des opérations utilisées par Tripakis [12] dans le cadre de la résolution de contraintes périodiques pouvant être ramenées à des UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  où  $t_{min} = 0$  et  $t_{max} = 1$ . Formellement, nous définissons l'opération de translation de la manière suivante :

**Définition 9** Soit  $\mathcal{S} = (V', C)$  un STP avec  $V' = V \times \{0, \dots, max\}$  ( $V$  étant un ensemble fini  $\{v_0, \dots, v_m\}$  et  $m, max \geq 0$ ). La translation de  $\mathcal{S}$ , dénotée  $\text{translation}(\mathcal{S})$ , est le STP  $\mathcal{S}_{tr} = (V_{tr}, C_{tr})$  où  $V_{tr} = V'$ , et pour tout  $v_i, v_j \in V$  et pour tout  $t_i, t_j \in \{0, \dots, max\}$ ,  $C_{tr}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \cap C((v_i, t_i - 1), (v_j, t_j - 1))$  si  $t_i > 0$  et  $t_j > 0$ , et  $C_{tr}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C((v_i, t_i), (v_j, t_j))$  sinon.

La translation du motif représenté dans la figure 4 est représentée dans la figure 7. Nous étendons la notion

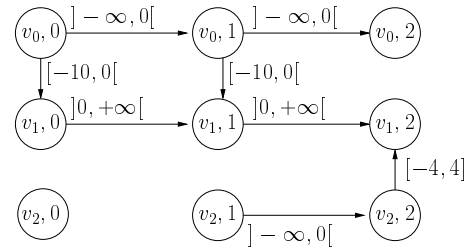


FIG. 7 – La translation de motif( $\mathcal{U}$ ).

de fermeture par chemin-cohérence et de translation aux UPSTP de la manière suivante :

**Définition 10** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP. La fermeture par chemin-cohérence de  $\mathcal{U}$  (resp. la translation de  $\mathcal{U}$ ), dénoté par  $\text{PC}(\mathcal{U})$  (resp.  $\text{translation}(\mathcal{U})$ ), est le UPSTP  $(V, C', t_{min}, t_{max})$  où  $C'$  est l'application de  $V \times \{0, \dots, t_{max}\} \times V \times \{0, \dots, t_{max}\}$  dans  $\text{INT}_{\mathbb{Q}}$  définie par :

- $C'(v_i, t_i, v_j, t_j) = C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, t_{max}\}$  tel que  $t_i < t_{min}$  ou  $t_j < t_{min}$ ,

•  $C'(v_i, t_i, v_j, t_j) = C_m^*((v_i, t_i - t_{min}), (v_j, t_j - t_{min}))$  pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{t_{min}, \dots, t_{max}\}$ , où  $C_m^*$  dénote les contraintes de la fermeture par chemin-cohérence (resp. de la translation) du motif de  $\mathcal{U}$ .

À partir de ces opérations nous définissons la propriété de fermeture :

**Définition 11** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP. Le UPSTP  $\mathcal{U}$  (resp. le motif  $\text{motif}(\mathcal{U})$ ) sera dit fermé ssi  $\mathcal{U} = \text{PC}(\text{translation}(\mathcal{U}))$  (resp. ssi  $\text{motif}(\mathcal{U}) = \text{PC}(\text{translation}(\text{motif}(\mathcal{U})))$ ).

Concernant la fermeture nous pouvons prouver les propriétés suivantes :

**Proposition 5** Soit  $\mathcal{U}$  un UPSTP.

- $\mathcal{U}$  est fermé ssi  $\text{motif}(\mathcal{U})$  est fermé,
- $\mathcal{U}$  est fermé ssi  $\mathcal{U} = \text{translation}(\mathcal{U})$  et  $\mathcal{U} = \text{PC}(\mathcal{U})$ ,
- $\text{motif}(\mathcal{U})$  est fermé ssi  $\text{motif}(\mathcal{U}) = \text{translation}(\text{motif}(\mathcal{U}))$  et  $\text{motif}(\mathcal{U}) = \text{PC}(\text{motif}(\mathcal{U}))$ .

Nous avons également le résultat suivant.

**Proposition 6** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP fermé. Soit  $\mathcal{S}^k = (V \times \{0, \dots, k\}, C_k)$  et  $\mathcal{N}^{k+1} = (V \times \{0, \dots, k+1\}, C_{k+1})$  le  $k$ -renforcement et le  $(k+1)$ -renforcement de  $\mathcal{U}$ , respectivement, avec  $k \geq t_{max}$ . La restriction de l'application  $C_{k+1}$  à  $V \times \{0, \dots, k\} \times V \times \{0, \dots, k\}$  est l'application  $C_k$ .

Nous allons établir maintenant le résultat fondamental concernant le problème de la cohérence des UPSTP fermés.

**Théorème 1** Soit  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  un UPSTP fermé. Toute solution de  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ), avec  $k \geq t_{max}$ , peut être étendue en une solution de  $(k+1)$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ).

**Preuve**(idée) À partir d'une solution  $\sigma$  de  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ) nous pouvons extraire une solution partielle de  $\text{fin}((k+1)\text{-renforcement}(\mathcal{U}))$ .  $\text{fin}((k+1)\text{-renforcement}(\mathcal{U}))$  est un sous-réseau du STP  $\text{motif}(\mathcal{U})$  qui est fermé et donc fermé par chemin-cohérence.  $\text{motif}(\mathcal{U})$  est donc également globalement cohérent. Il en résulte que nous pouvons étendre la solution partielle en une solution de  $\text{motif}(\mathcal{U})$ . Puisque les contraintes concernant l'instant  $\text{lg}$  sont les mêmes pour  $\text{motif}(\mathcal{U})$  et  $\text{fin}((k+1)\text{-renforcement}(\mathcal{R}))$ , cette solution est aussi une solution de  $\text{fin}((k+1)\text{-renforcement}(\mathcal{U}))$ . Cette solution peut être utilisée pour compléter la solution  $\sigma$  afin d'obtenir une solution de  $(k+1)$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ).  $\dashv$

Un corollaire de ce théorème est le résultat suivant :

---

### Algorithme 1 Fermeture

---

```

Calculer la fermeture d'un UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$ 
1: Faire
2:    $\mathcal{U}' := \mathcal{U}$ 
3:    $\mathcal{U} := \text{translation}(\mathcal{U})$ 
4:    $\mathcal{U} := \text{PC}(\mathcal{U})$ 
5: Tant Que ( $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$ )
6:   retourner  $\mathcal{U}$ 

```

---

**Corollaire 1** Le problème de la cohérence des UPSTP fermés est polynomial et peut être résolu en appliquant la méthode de la chemin-cohérence sur le  $t_{max}$ -renforcement du UPSTP, ce qui peut être réalisé avec une complexité en temps de  $O((t_{max} * |V|)^3)$ .

## 6 La méthode de la fermeture des UPSTP

Dans la section précédente nous avons montré que le problème de la cohérence des UPSTP fermés était un problème polynomial facilement soluble. Fort de ce résultat nous proposons dans cette section une méthode de propagation locale de contraintes tentant de transformer un UPSTP quelconque en un sous UPSTP équivalent et fermé. Comme nous le verrons dans la suite cette méthode qui correspond à l'algorithme **Fermeture** est saine dans le sens où lorsqu'elle s'arrête le UPSTP est bien un sous UPSTP fermé équivalent au réseau initial. Mais elle n'est pas complète dans le cas général : en effet, nous verrons que l'algorithme **Fermeture** peut ne pas s'arrêter. Malgré tout nous caractériserons deux cas très intéressants où l'algorithme s'arrête forcément au bout d'un temps fini. Étudions donc l'algorithme **Fermeture**. Cet algorithme utilise l'opération de translation et la méthode de la fermeture par chemin-cohérence pour calculer la fermeture d'un UPSTP. Nous pouvons tout d'abord montrer que l'algorithme est sain au sens où il calcule un UPSTP équivalent au réseau initial. La proposition suivante établit l'équivalence d'un UPSTP avec ses transformations et permet donc d'affirmer que l'algorithme **Fermeture** calcule bien un UPSTP équivalent au réseau initial :

**Proposition 7** La fermeture par chemin-cohérence et la translation d'un UPSTP  $\mathcal{U}$  sont équivalents à  $\mathcal{U}$ .

**Preuve**(idée)

- $\text{PC}(\text{motif}(\mathcal{U}))$  est un sous-réseau de  $\text{motif}(\mathcal{U})$ . Par conséquent, chaque  $k$ -renforcement de  $\text{PC}(\mathcal{U})$  est un sous-réseau du  $k$ -renforcement de  $\mathcal{U}$ . Ainsi, une solution de  $\text{PC}(\mathcal{U})$  est aussi une solution de  $\mathcal{U}$ . Avec une ligne de raisonnement similaire, nous pouvons prouver qu'une solution de  $\text{translation}(\mathcal{U})$  est aussi une solution de  $\mathcal{U}$ .

- Chaque solution  $\sigma$  de  $\mathcal{U}$  est une solution de tous les  $k$ -renforcements de  $\text{PC}(\mathcal{U})$  et une solution de tous les  $k$ -renforcements de  $\text{translation}(\mathcal{U})$ . Cela peut être prouvé par induction sur  $k$  avec  $k = t_{\max}$  comme cas de base. La preuve utilise les faits suivants : (i) toute solution de la fin de chaque  $k$ -renforcement de  $\mathcal{U}$  satisfait  $\text{motif}(\mathcal{U})$  et ainsi est une solution de  $\text{PC}(\text{motif}(\mathcal{U}))$  qui est  $\text{motif}(\text{PC}(\mathcal{U}))$ ; (ii) toute solution de la fin de tout  $k$ -renforcement de  $\mathcal{U}$  satisfait  $\text{translation}(\text{motif}(\mathcal{U}))$  qui est  $\text{motif}(\text{translation}(\mathcal{U}))$ .

–

L'algorithme **Fermature** ne s'arrête pas forcément. Pour s'en convaincre il suffit de considérer le **UPSTP** se trouvant représenté dans la figure 3 et de lui appliquer l'algorithme **Fermature**. On remarque que l'algorithme ne s'arrête pas et boucle indéfiniment. Le **UPSTP** obtenu après la  $i^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme **Fermature** est représenté dans la figure 8. En fait, le

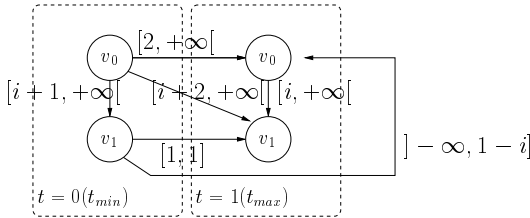


FIG. 8 – Le **UPSTP** obtenu après la  $i^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme **Fermature**.

non arrêt de l'algorithme **Fermature** permet de décider du problème de la cohérence du **UPSTP**, car on a la propriété suivante :

**Proposition 8** *Le non arrêt de l'application de l'algorithme **Fermature** à un **UPSTP**  $\mathcal{U}$  implique l'incohérence du **UPSTP**  $\mathcal{U}$ .*

**Preuve** Si l'algorithme **Fermature** boucle indéfiniment, c'est qu'il existe un des intervalles définissant une contrainte  $C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  de  $\mathcal{U}$  qui rapetisse indéfiniment par intersection. Cet intervalle diminue d'au moins une unité (les bornes finies des intervalles sont des entiers) à chaque intersection. Cet intervalle possède forcément une borne finie et une borne infinie. En effet, dans le cas contraire  $C(v_i, t_i, v_j, t_j)$  deviendrait l'intervalle vide. À partir de ces constatations et du fait que l'algorithme **Fermature** est sain, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de définir une application  $\sigma$  solution de  $\mathcal{U}$ . En effet, quelle que soit la distance  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i)$  il existe une itération de l'algorithme à partir de laquelle

$$\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \notin C(v_i, t_i, v_j, t_j).$$

–

Une question restant sans réponse est de savoir s'il existe un moyen de détecter que l'algorithme **Fermature** bouclera indéfiniment au bout d'un certain nombre d'itérations.

Pour certains types de contraintes nous sommes assurés que cet algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations. Nous pouvons par exemple citer les deux types de contraintes suivants :

1. les intervalles utilisés comme contraintes ont uniquement des bornes finies ;
2. les intervalles utilisés comme contraintes ont pour bornes des bornes infinies ou des bornes finies ouvertes ou fermées associées à la valeur 0.

Pour le premier type de contraintes, le nombre d'itérations réalisé par l'algorithme **Fermature** est borné par  $m(|V| * (\lg + 1))^2$  où  $m$  est la taille du plus grand des intervalles utilisés comme contraintes. Ceci provient du fait qu'à chaque itération, au moins une des contraintes diminue d'une unité. Concernant le deuxième type de contraintes remarquons que le nombre d'itérations est borné par  $3(|V| * (\lg + 1))^2$  puisque chacune des contraintes peut diminuer au plus trois fois. Ce deuxième type de contraintes est utilisé pour représenter des contraintes qualitatives issues de formalismes tels que le calcul des intervalles d'Allen [1] ou le calcul des points [13]. Le problème de la cohérence des **UPSTP** possédant des contraintes de ces deux types est donc polynomial.

## 7 Conclusion

Nous avons dans cet article introduit la notion de réseau de contraintes quantitatives ultimement périodiques. Cette notion permet d'exprimer des contraintes quantitatives (spatiales ou temporelles) qui, après une période initiale, évoluent en se répétant de manière périodique, reproduisant un même schéma que nous appelons motif. Pour ce type de réseau, nous proposons un algorithme de propagation de contraintes pour résoudre le problème de la cohérence. Cet algorithme peut dans certains cas ne pas s'arrêter, et dans ce cas le réseau n'est pas cohérent. On est cependant assuré de l'arrêt pour des types particuliers importants de réseaux. Une implantation de cet algorithme est actuellement en cours. L'étude menée ouvre différentes perspectives de travaux futurs. L'un d'eux concerne la caractérisation de nouveaux cas où le problème de la cohérence des **UPSTP** est polynomial. Un autre travail futur consiste à déterminer de manière précise la classe de complexité dans laquelle appartient le problème de cohérence des **UPSTP** et de définir de



nouveaux algorithmes permettant de résoudre ce problème.

## Références

- [1] J. F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proc. of the Seventh Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.
- [2] Mathias Broxvall. A method for metric temporal reasoning. In Rina Dechter, Michael Kearns, and Richard S. Sutton, editors, *Proceedings of the Eighteenth National Conference on Artificial Intelligence*, pages 513–518, Menlo Park, California, 2002. American Association for Artificial Intelligence, AAAI Press.
- [3] Jean-François Condotta. The augmented interval and rectangle networks. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Principles of Knowledge (KR'2000), Breckenbridge, USA*, 2000.
- [4] R. Dechter, I. Meiri, and J. Pearl. Temporal Constraint Networks. *Art. Int.*, 49(1-3) :61–95, 1991.
- [5] Alfonso Gerevini and Matteo Cristani. On finding a solution in temporal constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'97)*, pages 1460–1465, San Francisco, August 23–29 1997. Morgan Kaufmann Publishers.
- [6] Manolis Koubarakis. Dense time and temporal constraints with  $\neq$ . In William Nebel, Bernhard; Rich, Charles; Swartout, editor, *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 24–35, Cambridge, MA, October 1992. Morgan Kaufmann.
- [7] A. K. Mackworth and E. C. Freuder. The Complexity of Some Polynomial Network Consistency Algorithms for Constraint Satisfaction Problem. *Artificial Intelligence*, 25(1) :65–74, 1985.
- [8] Itay Meiri. Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 87(1–2) :343–385, 1996.
- [9] Paul H. Morris and Nicola Muscettola. Managing temporal uncertainty through waypoint controllability. In Dean Thomas, editor, *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99-Vol2)*, pages 1253–1258, S.F., July 31–August 6 1999. Morgan Kaufmann Publishers.
- [10] Isabel Navarrete and Roque Marin. Qualitative temporal reasoning with points and durations. In

*Proceedings of the 15th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'97)*, pages 1454–1459, San Francisco, August 23–29 1997. Morgan Kaufmann Publishers.

- [11] Arun K. Pujari and Abdul Sattar. A new framework for reasoning about points, intervals and durations. In Dean Thomas, editor, *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 1259–1267. Morgan Kaufmann Publishers, 1999.
- [12] S. Tripakis. Solving cyclic constraints. In *Workshop on real-Time Constraints (RTC'99)*, Taipei, Taiwan, 1999.
- [13] Marc Vilain, Henry Kautz, and Peter Van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning : A revised report. *Qualitative Reasoning about Physical Systems, Morgan Kaufmann, 1990*, pages 372–381, 1990.

## Annexe

**Preuve (Proposition 6)**  $\mathcal{S}_m = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C_m)$  dénotera motif( $\mathcal{U}$ ). Remarquons que  $\mathcal{S}_m$  est fermé. Soient  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{k - \lg + 1, \dots, k\}$ . À partir de Prop. 4 nous pouvons affirmer que  $C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \subseteq C_m((v_i, t_i - (k - \lg)), (v_j, t_j - (k - \lg)))$ .  $C_m$  étant fermé, nous avons  $C_m((v_i, t_i - (k - \lg)), (v_j, t_j - (k - \lg))) \subseteq C_m((v_i, t_i - (k - \lg) - 1), (v_j, t_j - (k - \lg) - 1))$ . Ainsi, pour tout  $v_i, v_j \in V$  et pour tout  $t_i, t_j \in \{k - \lg + 1, \dots, k\}$  nous avons  $C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \subseteq C_m((v_i, t_i - (k - \lg) - 1), (v_j, t_j - (k - \lg) - 1))$ . À partir de cela prouvons la propriété principale. Soient  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, k\}$ , supposons que  $t_i \leq t_j$ . Examinons tous les cas possibles. Supposons que  $t_i < (k + 1) - \lg$ . Par Déf. 6, nous avons  $C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ . Maintenant, supposons que  $t_i \leq (k + 1) - \lg$ . Toujours par Déf. 6, nous avons  $C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \cap C_m((v_i, t_i - ((k + 1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k + 1) - \lg)))$ . À partir du premier résultat de cette preuve nous savons que  $C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \subseteq C_m((v_i, t_i - ((k + 1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k + 1) - \lg)))$ . Il résulte que  $C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .  $\dashv$

**Preuve (Théorème 1)**  $\mathcal{S}_k = (V \times \{0, \dots, k\}, C_k)$  et  $\mathcal{S}_{k+1} = (V \times \{0, \dots, k + 1\}, C_{k+1})$  dénoteront respectivement  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ) et  $(k + 1)$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ).  $\mathcal{S}_m = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C_m)$  est motif( $\mathcal{U}$ ). Soit  $\sigma_k$  une solution de  $\mathcal{S}_k$ . Montrons que nous pouvons étendre  $\sigma_k$  en une solution  $\sigma_{k+1}$  de  $\mathcal{S}_{k+1}$ .

• Pour tout  $v_i \in V$  et  $t_i \in \{0, \dots, k\}$ , nous définissons  $\sigma_{k+1}(v_i, t_i)$  par  $\sigma_{k+1}(v_i, t_i) = \sigma_k(v_i, t_i)$ .

Pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, k\}$ , nous avons  $C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$  (Prop. 6). Ainsi,  $\sigma_{k+1}(v_j, t_j) - \sigma_{k+1}(v_i, t_i) \in C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .

• Il reste à définir  $\sigma_{k+1}(v_i, k+1)$  pour tout  $v_i \in V$ . Dénotons par  $\mathcal{S}_f = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C_f)$  la fin de  $\mathcal{S}_{k+1}$ . Soit  $\sigma_f$  l'application de  $V \times \{0, \dots, \lg-1\}$  dans  $\mathbb{Q}$  définie par  $\sigma_f(v_i, t_i) = \sigma_{k+1}(v_i, t_i - ((k+1) - \lg))$ .  $\sigma_f$  est une solution partielle de  $\mathcal{S}_f$  sur  $V \times \{0, \dots, \lg-1\}$ .  $\mathcal{S}_f$  étant un sous STP de  $\mathcal{S}_m$  (Prop. 4),  $\sigma_f$  est aussi une solution partielle de  $\mathcal{S}_m$ .  $\mathcal{S}_m$  est un STP chemin-cohérent et est donc globalement cohérent. Ainsi,  $\sigma_f$  peut être étendu en une solution  $\sigma_m$  de  $\mathcal{S}_m$ .  $\sigma_m$  est une application de  $V \times \{0, \dots, \lg\}$  dans  $\mathbb{Q}$  avec  $\sigma_m(v_i, t_i) = \sigma_f(v_i, t_i) = \sigma_{k+1}(v_i, t_i + t_{min})$  pour tout  $v_i \in V$  et  $t_i \in \{0, \dots, \lg-1\}$ . En remarquant que pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, \lg\}$ ,  $C_f((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_m((v_i, t_i), (v_j, t_j))$  dans le cas où  $t_i = \lg$  ou  $t_j = \lg$ , nous pouvons affirmer que  $\sigma_m$  est aussi une solution de  $\mathcal{S}_f$ . À partir de tout cela, en définissant  $\sigma(v_i, k+1)$  par  $\sigma(v_i, k+1) = \sigma_m(v_i, \lg)$  pour tout  $v_i \in V$ , nous pouvons affirmer que pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{k+1 - \lg, \dots, k+1\}$ ,  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$  dans le cas où  $t_i = k+1$  ou  $t_j = k+1$ . De plus, pour tout  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i \in \{0, \dots, k - \lg\}$ ,  $C_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, k+1)) = C_{k+1}((v_j, k+1), (v_i, t_i)) = ]-\infty, +\infty[$ , ces contraintes sont donc toujours satisfaites. À partir de tout ceci nous pouvons conclure que  $\sigma_{k+1}$  est une solution de  $\mathcal{S}_{k+1}$ .  $\dashv$

**Preuve (Proposition 7)** La fermeture par chemin-cohérence du motif du UPSTP  $\mathcal{U} = (V, C, t_{min}, t_{max})$  est un sous STP de ce motif. En conséquence, tout  $k$ -renforcement de la fermeture par chemin-cohérence de  $\mathcal{U}$  (avec  $k \geq t_{max}$ ) est un sous STP du  $k$ -renforcement de  $\mathcal{U}$ . Ainsi, une solution de la fermeture par chemin-cohérence de  $\mathcal{U}$  est une solution de  $\mathcal{U}$ . Maintenant prouvons que chaque solution  $\sigma$  de  $\mathcal{U}$  est une solution de la fermeture par chemin-cohérence de  $\mathcal{U}$ . Pour cela nous montrerons que toute solution  $\sigma$  de  $\mathcal{U}$  est une solution de tout  $k$ -renforcement de la fermeture par chemin-cohérence de  $\mathcal{U}$ . Dans la suite,  $\mathcal{S}_k = (V \times \{0, \dots, k\}, C_k)$  dénotera  $k$ -renforcement( $\mathcal{U}$ ),  $\mathcal{S}_m = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C_m)$  sera motif( $\mathcal{U}$ ) et  $\sigma$  est une solution de  $\mathcal{U}$ .  $\mathcal{S}'_k = (V \times \{0, \dots, k\}, C'_k)$  est  $k$ -renforcement(PC( $\mathcal{U}$ )) et  $\mathcal{S}'_m = (V \times \{0, \dots, \lg\}, C'_m)$  dénotera motif(PC( $\mathcal{U}$ )). Nous remarquons que  $\mathcal{S}'_m$  est un équivalent sous STP de  $\mathcal{S}_m$  fermé par chemin-cohérence. Montrons que  $\sigma$  satisfait  $\mathcal{S}'_k$ .

• Supposons que  $k = t_{max}$  est satisfaite. Soit  $v_I, v_J \in V$  et  $t_I, t_J \in \{0, \dots, t_{max}\}$ . Si  $t_i < t_{min}$  ou  $t_j < t_{min}$  nous avons  $C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ , en conséquence,  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .

Maintenant, considérons le cas où  $t_i \geq t_{min}$  et  $t_j \geq t_{min}$ . Soit  $\sigma'$  l'application de  $V \times \{0, \dots, \lg\}$  dans  $\mathbb{Q}$  par  $\sigma'(v_k, t_k) = \sigma(v_k, t_k + t_{min})$  pour tout  $v_k \in V$  et  $t_k \in \{0, \dots, \lg\}$ .  $\sigma'$  est une solution de  $\mathcal{S}_m$  et ainsi, est aussi une solution de  $\mathcal{S}'_m$ . Nous pouvons déduire que  $\sigma'(v_j, t_j - t_{min}) - \sigma'(v_i, t_i - t_{min}) \in C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ . En conséquence,  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .

• Supposons que la propriété est vraie pour le cas  $k \geq t_{max}$  et prouvons le pour  $k+1$ . Soient  $v_i, v_j \in V$  et  $t_i, t_j \in \{0, \dots, k+1\}$  (nous supposons que  $t_i \leq t_j$ ). Examinons tous les cas possibles.

- Considérons le cas  $t_i < (k+1) - \lg$  et  $t_j < k+1$ . Nous avons  $C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ . En conséquence, à partir de l'hypothèse de récurrence  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .
- Considérons le cas où  $t_j = k+1$  et  $t_j - t_i > \lg$ , nous avons  $C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = ]-\infty, +\infty[$ , ainsi,  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ .
- Considérons le cas où  $t_i \geq (k+1) - \lg$ . Soit  $\sigma'$  l'application de  $V \times \{0, \dots, \lg\}$  dans  $\mathbb{Q}$  définie par  $\sigma'(v_k, t_k) = \sigma(v_k, t_k - ((k+1) - \lg))$ .  $\sigma'$  est une solution de  $\mathcal{S}_m$  et ainsi, est aussi une solution de  $\mathcal{S}'_m$ . Il suit que nous avons  $\sigma'(v_j, t_j - ((k+1) - \lg)) - \sigma'(v_i, t_i - ((k+1) - \lg)) \in C'_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ . Il résulte que  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ . Deux sous cas doivent être considérés. Supposons que  $t_j = k+1$ . Il suit que  $C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C'_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ . Ainsi,  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ . Supposons que  $t_j < k+1$ . Il suit que  $C'_{k+1}((v_i, t_i), (v_j, t_j)) = C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j)) \cap C'_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ . Par hypothèse de récurrence nous avons  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_k((v_i, t_i), (v_j, t_j))$ . De plus, nous avons précédemment prouvé que  $\sigma(v_j, t_j) - \sigma(v_i, t_i) \in C'_m((v_i, t_i - ((k+1) - \lg)), (v_j, t_j - ((k+1) - \lg)))$ .

Avec une ligne de raisonnement similaire nous pouvons démontrer l'équivalence pour l'opération de translation.  $\dashv$